ЛИТЕРАТУРА

1. Бикчентаев А. М. *$B(H)$ алгебраически порождается своими проекторами*// Теория функций, ее прил. и смежные вопросы. Материалы школы-конф., посв. 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова. - Казань: Изд-во Каз. матем. об- ва, 1999. - С. 42-43.

2. Dixmier J. *Position relative de deux variétés linéares fermées dans un espace de Hilbert*// Revue Scientifique. - 1948. - V. 86. - P. 387-399.

3. Holland S. S., Jr. *Projections algebraically generate the bounded operators on real or quarternionic Hilbert space*// Proc. Amer. Math. Soc. - 1995. - V. 123. - No 11. - P. 3361-3362.

4. Fillmore P. A. and Topping D. M. *Operator algebras generated by projections*// Duke Math. J. - 1967. - V. 34. - No 2. - P. 333-336.

А. М. Бикчентаев, А. Д. Маклаков (Казань)

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ В ВИДЕ КОНЕЧНЫХ СУММ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СИММЕТРИЧНЫХ ИДЕМПОТЕНТОВ

В [1] фактически показано, что каждый линейный ограниченный оператор в бесконечномерном гильбертовом пространстве представляется в виде конечных сумм произведений не более, чем трех ортопроекторов. В [2] это число уменьшено до двух и для конечномерного случая показано, что число сомножителей равно трем.

Здесь приведены два утверждения для $n \times n$−матриц ($n \geq 2$) над полем вычетов Z_p, где p — простое число. Второе утверждение является аналогом упомянутых результатов. В таких полях ортопроекторам соответствуют симметричные идемпотенты (далее с.и.). Неожиданным является тот факт, что число сомножителей равно двум, как и для операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве ($p > 2$). При $p = 2$ результат аналогичен конечномерному случаю над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Теорема 1. i) *При* $p > 2$ *любая симметричная матрица представляется в виде конечной суммы с.и.*

ii) *При* $p = 2$ *не всякая симметричная матрица представляется в виде конечной суммы с.и. Доля симметричных матриц, представляемых в виде конечной суммы с.и., в общем числе симметричных* $n \times n$*-матриц составляет* 2^{1-n}.

Теорема 2. i) *При* $p > 2$ *любая матрица представляется в виде конечной суммы произведений не более, чем двух с.и.*

ii) *При* $p = 2$ *и* $n > 2$ *любая матрица представляется в виде конечной суммы произведений не более, чем трех с.и. Не всякая матрица может быть представлена в виде конечной суммы произведений двух с.и.*

iii) *При* $p = 2$ *и* $n = 2$ *ни одна матрица не может быть представлена в виде конечной суммы конечных произведений с.и. (кроме, разумеется, самих с.и.).*

Следующее утверждение является аналогом для конечных полей результата [3] для операторов бесконечномерного гильбертова пространства.

Предложение. *Любая матрица над полем* Z_p *представляется в виде конечной суммы идемпотентов.*

Заметим, что для конечномерного гильбертова пространства над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ имеет место лишь более слабое утверждение: каждый линейный оператор представляется в виде конечной суммы попарных произведений идемпотентов (в каждом слагаемом один из сомножителей можно выбрать эрмитовым).

Работа поддержана РФФИ (проект 98-01-00103) и программой "Университеты России" (проект 990213).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бикчентаев А. М. *B(H) алгебраически порождается своими проекторами*// Теория функций, ее прил. и смежные вопросы. Материалы школы-конф., посв. 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова. – Казань: Изд-во Каз. матем. об-ва, 1999. – С. 42–43.

2. Бикчентаев А. М., Григорян С. А., Шерстнев А. Н. $B(H)$

алгебраически порождается своими проекторами// См. настоящий сборник.

3. Pearcy C. and Topping D. *Sums of small numbers of idempotents*// Michigan Math. J. - 1967. - V. 14. - P. 453–465.

Р. Ф. Билялов (Казань)

СПИНОРЫ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

У ортогональных групп $O(p,q)$ существуют тензорные и спинорные представления, причем последние не допускают расширения до представления объемлющей полной линейной группы $GL(n)$, $n = p + q$. Поэтому для задания спиноров на римановых многообразиях вводятся поля ортогональных реперов, при переходе от одного поля ортогонального репера к другому с помощью некоторого поля ортогональных преобразований спиноры преобразуются с помощью соответствующего поля спин-преобразований. Эта необходимость использовать только ортогональные реперы при рассмотрении спиноров на римановых многообразиях приводит к трудностям уже при построении производной Ли спиноров. При переносе с помощью точечного бесконечно малого преобразования $x' = x + t\xi$ ортогонального репера e^α_a из точки $x - t\xi$ в точку x перенесенный репер $\tilde{e}^\alpha_a(x)$ перестает быть ортогональным репером, следовательно, переход от этого репера к реперу $e^\alpha_a(x)$ описывается неортогональным преобразованием, и возникает проблема расширения спинорного представления группы $O(p,q)$ до представления объемлющей группы $GL(n)$. В дальнейшем для простоты рассуждений положим $q = 0$, т.е. ограничимся рассмотрением только собственно римановых пространств.

Лемма 1. *Для произвольной симметрической матрицы $g = (g_{\alpha\beta})$, задающей положительно определенную квадратичную форму, существует единственное положительное симметрическое преобразование $S(g)$, удовлетворяющее условию $S(g)gS(g) = (\delta_{\alpha\beta})$.*

Лемма 2. *Пусть $G = \{g\}$, где g задает положительно определенную квадратичную форму. Существует множество*